Az égitestmagasságok mérési hibáinak kiértékelése

Írta: Vass Tibor okl. mérnök navigátor

Ha elvégzünk egy mérést, az elkerülhetetlenül tartalmaz magában mérési hibákat. Mérési hibának (Δ) nevezzük valamely mérendő mennyiség valós értéke (a) és a mért érték (a_i) különbségét.

$$\Delta = a_i - a \qquad (1)$$

A tengeri navigációban ahhoz, hogy meg tudjuk határozni hajónk helyét, elkerülhetetlenül méréseket kell végeznünk. Ha partközelben hajózunk, akkor az így keletkezett mérési hibákat ellenőrizni tudjuk, ha pl. több módszerrel határozzuk meg a hajó helyét. Abban az esetben viszont, ha a part navigációs szemszögből nézve nem elérhető, akkor nincs mód a mérési hibák kiértékelésére (feltéve, hogy nincs a hajón elektronavigációs berendezés). Ez különösen élesen felvetődő probléma, ha a nyílt tenger felől közelítjük meg a partot. Ilyenkor mindig bizonytalan a hajó helye.

A következőkben ismertetünk egy, a magasságmérés pontosságának kiértékelésére szolgáló módszert, ami növeli a navigáció biztonságát és minőségét.

A mérési hibákat a mérő személy érzékszerveinek, a mérőműszereknek a tökéletlensége, a külső behatások okozta torzulások és magában a paraméterben rejlő hibák okozzák. Függetlenül a hibák létrejöttének módjától a navigációban ezeket három nagy csoportra oszthatjuk: rendszeres, véletlen és durva mérési hibákra.

A rendszeres mérési hibák jellemzője, hogy valamilyen, általunk meghatározható függvényszerű kapcsolatban vannak a mért értékkel. Ezt a kapcsolatot meg lehet határozni, ezek alapján táblázatokat, grafikonokat lehet szerkeszteni. Ilyen pl. a szeksztáns műszer- és index-hibája (I + s), a nap félátmérőjének korrekciója stb.

A mérési hibák második nagy csoportja a véletlen mérési hibák. Ezeket olyan sokféle és ismeretlen külső hatás okozza, hogy nem tudjuk meghatározni, milyen függvényszerű kapcsolat van a mért mennyiség és a mérési hiba között. A véletlen mérési hibák előjele és mértéke minden egyes mérésnél változhat, és ezt előre nem lehet meghatározni. Nagyon jó példa erre, amikor több megfigyelő végez delelési magasságmérést. A végeredményként kapott obszervált szélességek sohasem esnek egybe a véletlen mérési hibák következményeként. A rendszeres mérési hibákat az „i + s" javítást kivéve egyformán kiiktatjuk, így ezek nem befolyásolják jelentősen az összehasonlítást.

A véletlen mérési hibákat statisztikai módszerekkel, valószínűségi alapon fel lehet dolgozni a három alapvető tulajdonságukat felhasználva:

1. Az adott mérési sorozatban rejlő mérési hibák egy meghatározott határértéket nem léphetnek túl;

2. Nagy mérési sorozatban a kisebb hibák gyakrabban fordulnak elő, mint a nagyobbak;

3. Nagy mérési sorozatban az azonos értékű, de különböző előjelű mérési hibák gyakorisága egyforma.

A 3. pont alapján megállapíthatjuk, hogy a nagyszámú (elvileg végtelen) mérés közül a számtani közép a_0 értéke a valós érték felé fog közelíteni, ha elvégezünk n számú mérést $a_1, a_2, \ldots a_n$ eredménnyel:

$$a = a_0 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\sum_{n=\infty} a_i}{n} \qquad (2)$$

Mivel a mérések száma a gyakorlatban nem végtelen ($n \neq \infty$), így a számtani közép (a_0) nem egyezik meg a valós értékkel (a).

Egy véges számú mérési szempontból meghatározott a_0 számtani közép értéke nem egyezik meg ugyan az „a" valós értékkel, de mégis közelebb van hozzá, mint

Mielőtt rátérnék a konkrét példára, meg kell említeni az itt található két nagy rendszeres hiba javítási módját:

1. Javítás az égbolt mozgása miatt. Mivel a mérési sorozat nem egyidőben készült, így az égbolt napi mozgása következtében a keleti oldalon levő magasságok állandóan nőnek, míg a nyugati oldalon levők állandóan csökkennek a mérések között eltelt idő függvényében. (A meridiánban levő égitestek magassága nem változik.) A következő képlet lehetőséget ad ennek javítására, a *mérések egy időhöz viszonyítására*.

$$\Delta h_t' = 15 \cdot \sin A_z \cdot \cos \varphi \qquad (7)$$

ahol:

$\Delta h_t'$ — az 1 perc időre eső magasságváltozás az égbolt forgása miatt,

A_z — az égitest azimuthja,

φ — a hajózott szélesség.

Ezt a korrekciót a NORIE's táblázatból is megkaphatjuk (a 120—121. oldalon).

2. A hajó mozgása miatti javítás. A helymeghatározás általában a haladó hajón történik, és a mérések között eltelt idő alatt a hajó vagy közeledik az égitest felé — „alámegy" — vagy távolodik tőle — „kimegy alóla" — vagy pedig, ha az orrszög 90°, nem változik a magassága. Az első esetben a magasság növekszik, míg a másodikban állandóan csökken. Ezt a javítást a következő képlettel lehet meghatározni:

$$\Delta h_z' = \frac{v}{60} \cdot \cos (A_z - T_c) \qquad (8)$$

ahol:

$\Delta h_z'$ — a hajó mozgását korrigáló 1 percnyi időre eső magasságváltozás,

v — a hajó csomókban mért sebessége,

A_z — az égitest azimuthja,

T_c — a hajó valós útiránya.

Ezt a javítást a helyzet meghatározásánál általában grafikusan végezzük, és a helyzetvonalat egyszerűen el kell tolni a megtett útnak megfelelően. Ezt nevezik *egy zenithez viszonyításnak.*

Ha megkaptuk a $\Delta h_t'$ és a $\Delta h_z'$-t, akkor algebrai összegük megadja az 1 perc időre eső magasságváltozást.

$$\Delta h' = \Delta h_t' + \Delta h_z' \qquad (9)$$

Ezek után egy konkrét példán bemutatom a méréspontosság becslését:

Hajónk $\varphi = 23°$ N szélességen halad $v = 16$ csomó sebességgel $T_c = 45°$-os irányban. Elvégeztünk 7 magasságmérést, ami a hozzá tartozó kronométer-idővel együtt a 2. táblázat 2. és 6. oszlopában található. A nap alsó szélét mértük, és a középidő $T_{gr} = 05^h\ 06^m\ 10^s$. Ekkor a nap azimuthja $A_z = 260°$.

Határozzuk meg a négyzetes középhibát, a határhibát és a számtani közép négyzetes középhibáját:

A számítás menete a következő (a táblázat oszlopai szerint):

1. a mérések száma;

2. a mérésekhez tartozó kronométer-idő (ezt lehet stopperral is mérni, mert nincs szükség a GMT-re);

3. a 4. mérést kiválasztjuk mint középsőt, és ehhez viszonyítva kiszámítjuk, mennyivel előbb vagy később történt a mérés;

4. a 3. oszlopban szereplő időket átváltjuk sec-ról min-re;

5. $\Delta h' = \Delta h_t' + \Delta h_z'$ műveletet elvégezve megkapjuk az adott ΔT-re eső magasságváltozást, ha $\Delta h = \Delta h' \cdot \Delta T^m$

$$\Delta h_t' = 15 \cdot \sin 260° \cdot \cos 23° \qquad (7)$$

$$\Delta h_t' = -13{,}6'$$

$$\Delta h_z' = \frac{16}{60} \cdot \cos (260° - 45°) \qquad (8)$$

$$\Delta h_z' = -0{,}22'$$

$$\Delta h_z' = -13{,}6' + -0{,}22' = -13{,}82'$$

6. a mért magasságok; h_0 az átlag magasság;

7. $h' = h + \Delta h$;

8. $v_i = h' - h_0$; ellenőrzésképpen, ha $a \leqq v_i \approx 0$, akkor helyesen állapítottuk meg a h_0 számtani középmagasságot. Itt $v_i = -0{,}2$.

9. a v_i-t négyzetre emeljük, majd összegezzük.

Ezek után:

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{v_i^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{3{,}15}{7-1}} = \pm 0{,}72'$$

A határhibát megkapjuk, ha

$$\sigma_h = \pm 3 \cdot \sigma = \pm 3 \cdot 0{,}72 = \pm 2{,}16'$$

A számtani középmagasság négyzetes középhibája:

$$\sigma_o = \pm \sqrt{\frac{\sigma_h}{n}} = \pm \frac{0{,}72}{\sqrt{7}} = \pm 0{,}27'$$

Ez volt a középértéktől való eltérés módszere.

Az amplitúdó alapján a számítás menete a következő:

1. kitöltjük a táblázatot a 8. és 9. oszlop kivételével;

2. a 7. oszlopból kiválasztjuk a legnagyobb és a legkisebb magasságot:

$h_{max} = 29°\ 45{,}8'$
$h_{min} = 29°\ 43{,}9'$

3. meghatározzuk a mérések amplitúdóját:

$R = h_{max} - h_{min} = 29°45{,}8' - 29°43{,}9' = 1{,}9'$

4. kiválasztjuk a k_n-t az első táblázatból:

$n = 7, \quad k_n = 0{,}370$

5. meghatározzuk a négyzetes középhiba értékét:

$\sigma = \pm R \cdot k_n = \pm 1{,}9 \cdot 0{,}370 = \pm 0{,}71$

6. a határhiba értéke:

$\sigma_h = \pm 3 \cdot \sigma = \pm 3 \cdot 0{,}71' = \pm 2{,}13'$

7. a középmagasság négyzetes középhibája:

$$\sigma_o = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \pm \frac{0{,}71}{\sqrt{7}} = \pm 0{,}268'$$

Befejezésül a következőket lehet megállapítani:

a) Ha nem egy mérést végzünk el, hanem egy mérési sorozatot, és ebből egy középidővel és középmagassággal számolunk obszervált helyet, akkor a mérés megbízhatósága több mint 2—5-szörösére nő.

b) Meg kellene követelni a navigációs tisztektől, hogy meghatározott időszakonként ellenőrizzék a szekszténssal való mérési pontosságukat, különösen hosszabb parti tartózkodás után.

c) Az itt ismertetett módszer alapján súlyozni lehet az egyes tisztek által meghatározott obszervált hely megbízhatóságát, a hajó obszervált helyének kiválasztását. Erre eddig csak szubjektív módszerek voltak.

bármelyik más mérési eredmény. A számtani közép a legvalószínűbb mérési eredmény.

Ha növeljük a mérések számát, úgy a mérési hibák csökkenésén kívül lehetőség nyílik ezek kiértékelésére.

Bármilyen mérésnél, bármilyen pontosan is mérünk, akkor is elkerülhetetlenek a véletlen mérési hibák. A csillagászati navigációban ezt elsősorban a horizont láthatósága és a fedélzeti tisztek ügyessége határozza meg.

Ha a mérési hibák túllépnek egy bizonyos határt, akkor beszélünk a durva hibákról. Ez általában a standard hiba háromszorosa. Ha észrevesszük, hogy egy méréssorozat egyes tagjai túllépik ezt, akkor kizárjuk a további feldolgozás alól, és újra kezdjük a standardhiba meghatározását.

Az itt említettekből kitűnik, hogy a rendszeres hibát javítással, a durva hibákat pedig kizárással hatástalaníthatjuk. Marad tehát a véletlen mérési hiba, amit statisztikai módszerekkel becsülhetünk meg. A hibaszámítási módszerek a véletlen mérési hibák feldolgozására készültek, és a következőkben ezeket fogom ismertetni.

Egy konkrét mérésből nem lehet kiértékelni a véletlen mérési hibákat, hanem csak egy sorozatból. Erre szolgál a négyzetes középhiba, vagy standardhiba (δ):

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}} \qquad (3)$$

ahol:

σ — a négyzetes középhiba értéke,

n — a mérések száma,

v_i — az egyes mérési eredmények és a számtani közép különbsége: $v_i = a_i - a_0$.

A valószínűségi számításokkal megállapítható, hogy egy megfelelő számú mérési sorozatból

1. a mérések 98,3 százaléka nem lépi túl a σ-t;
2. a mérések 95,4 százaléka nem lépi túl a 2 σ-t;
3. a mérések 99,7 százaléka nem lépi túl a 3 σ-t.

A négyzetes középhiba háromszorosát nevezik határhibának.

$$3\,\sigma = \sigma_h \qquad (4)$$

A gyakorlatban elfogadható valószínűséggel megállapíthatjuk, hogy a σ_h = n belül található hibákat számításba vettük, és a maradék 0,3 százalékot a durva mérési hibák közé sorolva kizárjuk.

Fentebb ismertetésre került a számtani közép azon tulajdonsága, hogy azt egy véges mérési sorozatból meghatározva nem lesz egyenlő a valós értékkel ($a_0 \neq a$), amit a következő képlettel lehet meghatározni:

$$\sigma_0 = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (5)$$

ahol σ_0 a számtani közép négyzetes középhibája.

Az (5) képletből következik, hogy a mérések számának növelésével a számtani közép négyzetes középhibája csökken.

Meg kell említeni még a következőket:

1. Ez a feldolgozási módszer csak az egyenlő pontosságú méréseknél (pl. ugyanaz a személy ugyanazzal a műszerrel ugyanolyan körülmények között mér) helytálló.

2. A gyakorlatban 12 mérésnél többet végezni nem érdemes, mert a több adat nyújtotta pontosságnövekedés fordított arányban van a megfigyelő kifáradása okozta pontosságcsökkenéssel.

Az ismertetett módszer gyakorlati alkalmazása

A csillagászati navigációban kétféleképpen lehet megbecsülni a mérések pontosságát:

1. a középértéktől való eltérés (konvergencia) alapján,
2. a mérések amplitúdója alapján.

Mind a két esetben el kell végezni 5—11 közvetlen, egyenlő pontosságú magasságmérést, majd azokat feldolgozva ki kell zárni a durva hibákat és javítani a rendszeres hibákat.

Az első módszer a már ismertetett négyzetes középhiba képletének megoldása:

$$\sigma_0 = \pm \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}} \qquad (5)$$

Az amplitúdó-módszer viszont a következő képlettel számol:

$$\sigma = \pm (a_{max} - a_{min}) \cdot k_n = \pm R \cdot k_n \qquad (6)$$

ahol:

a_{max} — a legnagyobb mért érték,

a_{min} — a legkisebb mért érték,

k_n — korrelációs koefficiens; értéke az 1. táblázatban található,

R — a mérések amplitúdója; $R = a_{max} - a_{min}$

1. táblázat

n	5	6	7	8	9	10	11
k_n	0,430	0,395	0,370	0,351	0,337	0,325	0,315

2. táblázat

N°	T_{er}	T°	T^m	h	h	h	v_i	v_i^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5°04™15°	115°	1,9™	—26,3'	30°10,9	29°44,6'	—0,5'	0,16'
2	04 53	77	1,3	—17,9	30 02,6	45,2	+0,2	0,04
3	05 35	35	0,6	— 8,3	29 53,4	45,1	+0,1	0,01
4	06 10	00	0,0	0,0	29 45,0	45,0	0,0	0,00
5	06 51	41	0,7	+ 9,7	29 36,1	45,8	+0,8	0,64
6	07 37	87	1,4	+19,3	[illegible] 24,6	43,9	—1,1	0,21
7	08 27	137	2,3	+31,7	[illegible]	45,3	+0,3	0,09
						h_0 = 29°45,0'		Σ = 3,15'